

有过冷时圆柱体的熔解研究

北京航空航天大学 曲 鹏^{**} 沙 斌 袁修干

【摘要】 本文通过引入新的温度分布表达式,研究了有过冷影响时圆柱体外固体的熔解问题,得到了简单而有效的近似分析解。该方法分析过程简单、直观,所得结果与数值计算结果符合得较好,亦可求解大过冷度和大 Stefan 数的相变问题,十分适合于工程分析计算。

关键词: 熔解 相变 传热

1 数学模型

本文应用文献 [1] 提出的求解圆柱体相变问题新的温度分布式,对有过冷影响时圆柱体熔解问题进行了研究,得到了简单而有效的近似分析解。该方法与热平衡积分法型式相同,但求解过程不需求解热微分方程组,分析过程简单、明了,计算简便,所得结果具有较高的精度。

半径为 R 的无穷长圆柱被均匀温度 T_c 的固态相变介质包围,温度 T_c 小于介质的相变温度 T_f ,即介质初始处于过冷状态。在 $t=0$ 时,圆柱体表面温度升至 T_w ,并保持下去。熔解层则在圆柱外形成,其厚度随时间增长。同时,一温度波(称之为渗透距离)亦在固相中移动。因此,本问题包括 2 个移动的边界(相变界面和温度波前沿)。如图 1 所示。

在分析中认为该问题为一维传热,凝固发生在一固定温度 T_f ,两相的热物性不随温度变化。如上所述,问题的基本方程和边界条件可描述为

$$Ste(\partial U_i / \partial \eta) = \partial^2 U_i / \partial \xi^2 + (1/x)(\partial U_i / \partial \xi) \quad i = L, S \quad (1)$$

$$U_i(x, \eta)|_{x=\delta} = 0 \quad (2)$$

$$(\partial U_s / \partial \xi)|_{x=\delta} + (\partial U_L / \partial \xi)|_{x=\delta} = -d\delta / d\tau \quad (3)$$

$$U_L(x, \eta)|_{x=1} = 1 \quad (4)$$

$$U_S(x, \eta)|_{x=\eta} = \varphi, \quad (\partial U_s / \partial \xi)|_{x=\eta} = 0 \quad (5)$$

$$U_S(x, 0) = \varphi, \quad \delta(0) = 1, \quad \eta(0) = 1 \quad (6)$$

无因次变量定义如下: $U_L = (T_L - T_f) / (T_w - T_f)$, $U_S = (T_f - T_s) / (T_w - T_f)$

$\varphi = (T_f - T_c) / (T_w - T_f)$, $x = r/R$, $\xi = S_1/R$, $\eta = S_2/R$, $Ste = C(T_w - T_f)/L$, $Fo = \alpha/R^2$, $\tau = Ste \cdot Fo$ 。

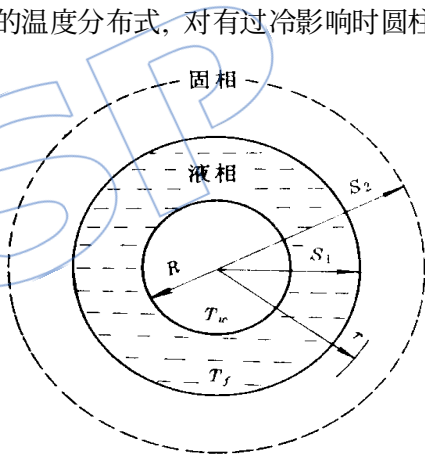


图1 圆柱体熔解过程示意图

式中: T 为温度; K 为导热系数; α 为导温系数; ρ 为密度; L 为相变潜热; c 为比热; r 为坐标; t 为时间; S_1 、 S_2 分别表示固液界面位置和温度波前沿位置; φ 为过冷度; Fo 为 Fourier 准则数; Ste 为 Stefan 数。下标 L 、 S 分别表示液相和固相。

即使不存在过冷 ($\varphi = 0$), 上述方程也未得到精确解。

2 分析解法

本文采用的分析方法是将整个相变传热问题转化到液相区求解, 这一方法已成功地用于解决初始温度不为相变温度的相变问题^[2]。而对于初始不存在过冷情况, 一新型的固相温度分布表达式也成功地用于求解圆柱体外形的凝固、熔解问题^[1]。

设函数 $F(\delta, \tau) = (\partial U_s / \partial x)|_{x=\delta}$, 利用文献 [1] 提出的分析方法, 可得液相的温度分布为:

$$U_L(x, \tau) = (\delta/x)^{1/2} F(\delta, \tau) [(x - \delta) - (1/2) Ste(d\delta/d\tau)(x - \delta)^2] \quad (7)$$

式中: 函数 $F(\delta, \tau)$ 与固相温度分布有关。实际上, 它反映过冷对相变过程的影响程度。(7) 式还表明, 液相温度分布取决于相变界面位置 $\delta(\tau)$ 及其移动速率 $d\delta/d\tau$, 而 $\delta(\tau)$ 及 $d\delta/d\tau$ 与外部边界条件有关, 因此温度分布也就合理地取决于外部边界条件。

传统方法是应用热平衡积分法^[3], 联立求解关于 δ 的微分方程组, 计算十分不便。

在多数情况下, 固相区温差小, 因此可确定固相区温度分布为^[2]:

$$U_s(x, \tau) = [(x - \delta)/(\eta - \delta)] [1 - (x - \delta)/(\eta - \delta)] \varphi \quad (8)$$

显然, 温度分布式 (8) 满足固相区所有的边界条件。则

$$(\partial U_s / \partial x)|_{x=\delta} = 2\varphi(\eta - \delta) \quad (9)$$

根据文献 [2] 的结论及考虑圆柱体外形的特点, 可确定的关系为:

$$1/(\eta - \delta) = Ste\delta(d\delta/d\tau) \quad (10)$$

因此, 函数 $F(\delta, \tau)$ 为

$$F(\delta, \tau) = -(1 + 2Ste\delta)(d\delta/d\tau) \quad (11)$$

将式 (11) 代入温度分布式 (7), 引入液相外部边界条件式 (4), 便可得关于 δ 的微分方程:

$$Ste(\delta - 1)(d\delta/d\tau)^2 + 2(d\delta/d\tau) - 2\delta^{-1/2}[(1 + 2Ste\delta)(\delta - 1)] = 0 \quad (12)$$

解此微分方程, 并利用初始条件, 可得相变界面位置 δ 与时间 τ 的函数式, 为

$$\tau = \int_{-1}^{\delta} \frac{Ste(x - 1)}{[-1 + \{1 + 2Stex^{-1/2}/(2Ste\delta + 1)\}]^{1/2}} dx \quad (13)$$

该式可应用数值积分简单地求解。在无过冷情况 ($\varphi = 0$) 时, 式 (13) 简化为:

$$\tau = \int_{-1}^{\delta} \frac{Ste(x - 1)}{[-1 + (1 + 2Stex^{-1/2})]^{1/2}} dx \quad (14)$$

与文献 [1] 导出的结果一样。

3 计算结果及讨论

3.1 计算精度

由于本文所讨论的问题无精确解, 各种近似方法的结果分散性较大。为说明本文方法求解精度, 本文利用式 (13) 的计算结果与数值计算结果进行比较。

在 $Ste = 1$, $\varphi = 1$, 本文结果与文献 [4] 的有限差分计算结果吻合的较好, 相变界面位置的偏差在 1% 以内, 熔解层厚度的偏差在 3.5% 以内。而在无过冷时, 本文方法所得结果与数

值解的偏差在 3% 以内。

3. 2 过冷/无过冷比较

图 2 为 $Ste = 0.1, 1$ 时, 不同过冷度 ($\varphi = 0, 1, 4$), 时相变界面位置随时间的关系。同时还给出了文献 [5] 的数值计算结果, 二者吻合的较好。还可看出, 有过冷存在时, 熔化进程减慢, 过冷度越大, 熔化速度越慢。而对于大 Stefan 数 ($Ste = 1$), 相同过冷度下熔化速度减小的程度要大于小 Stefan 数 ($Ste = 0.1$)。这是由于大 Stefan 数下显热对于相变界面位置的影响加强, 因此对一定的过冷度 φ , 其在大 Stefan 数下对于相变界面位置的影响要大于小 Stefan 数。

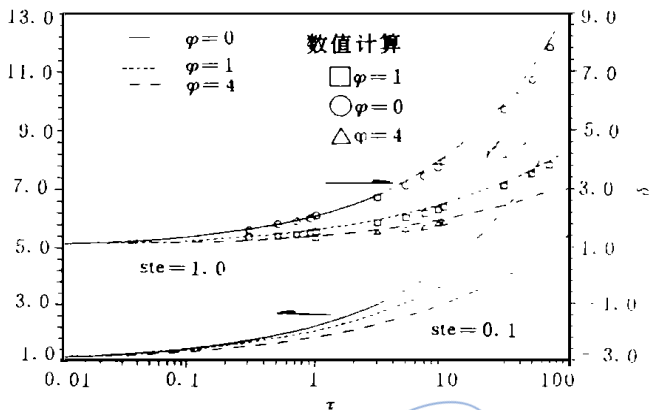


图 2 不同过冷度对相变界面位置与时间关系 ($Ste = 0.1, 1.0$)

计算结果表明, 对圆柱体的熔解, 有过冷存在时其熔解层厚度随时间的增长要低于无过冷情况, 两者的比值随时间减小。同时, 通过圆柱体熔解与平板熔解的计算结果比较^[2], 发现过冷度对圆柱体熔解层厚度的影响要大于平板, 对相同的过冷度及在相同的时间, 圆柱体熔解层较平板的熔解层薄。在短时间内, 二者偏差不大, 随时间延长, 二者偏差加大。

结论 分析结果表明, 有过冷时, 熔解层厚度要薄于无过冷, 在大过冷、大 Stefan 数和较长熔解时间时, 这一影响更加明显。过冷对平板和圆柱体熔解的影响也存在明显的差别。在相同过冷度下, 圆柱体熔解层厚度要薄于相应平板的熔解层厚度, 随着熔解时间加长, 二者之差更大。这一结论对指导相变储热器的冷源设计十分重要。因为在大过冷和大 Stefan 数下导致熔解速率减小, 因而可知大过冷度和大 Stefan 数相变介质是相变储热器合适的冷源。由于圆柱外的熔解层在大厚度时熔解速率进一步减小, 因此这种储存更有竞争力。

参 考 文 献

- 1 曲鹏, 袁修干. 圆柱体凝固研究. 低温工程, 1993 (3)
- 2 Qu P, Zhang C M, Liao X H, Yuan X G. A New Computation Method of Solidification for a Finite Initially Overheated Slab, J. Thermal Science, 1992, 1: 272-277
- 3 Lunardini V J. Phase Change around a Circular Cylinder. J. Heat Transfer. 1981, 103: 598-600
- 4 Yuen W W, Keenan A M. Application of a Variable-time-step Finite-difference Method for the One-dimensional Melting Problem Including the Effect of Subcooling. AIChE Symp, 1979, 75: 120-126
- 5 Sparrow E M, Ramdahiyan S, Patankar S V. Effect of Subcooling on Cylindrical Melting. Trans. ASME J. Heat Transfer, 1978, 100: 395-402